4. Ординальные числа

Определение. *Пусть A и B — линейно упорядоченные (л.у.) множества. Отображение $\varphi : A \to B$ называется изоморфизмом л.у. множества A на л.у. множество B, если φ биективно и для любых элементов $x, y \in A$ из $x \leqslant y$ следует $x\varphi \leqslant y\varphi$.*

Справедливость следующего утверждения проверяется непосредственно.

Предложение 1. *Тождественное отображение л.у. множества является изоморфизмом. Произведение двух изоморфизмов л.у. множеств является изоморфизмом. Отображение, обратное к изоморфизму, является изоморфизмом.*

Определение. *Будем говорить, что порядковый тип л.у. множества A равен порядковому типу л.у. множества B (и записывать это в виде $o(A) = o(B)$), если существует изоморфизм множества A на множество B.*

Из предложения 1 очевидным образом следует

Предложение 2. *Для любых л.у. множеств A, B и C*

(1) $o(A) = o(A)$;
(2) $o(A) = o(B) \Rightarrow o(B) = o(A)$;
(3) $o(A) = o(B) \wedge o(B) = o(C) \Rightarrow o(A) = o(C)$.

В силу определения очевидно также, что если порядковые типы двух л.у. множеств A и B совпадают, то $|A| = |B|$. Непосредственной индукцией можно доказать, что для конечных множеств справедливо и обратное. А именно, если л.у. конечные множества состоят из одного и того же числа элементов, то они изоморфны. Порядковый тип конечного множества, состоящего из n элементов, обозначается через n.

Для обозначения порядковых типов бесконечных л.у. множеств используют малые греческие буквы. Так, порядковый тип множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел, рассматриваемого с его естественным отношением порядка, обозначается символом ω. Таким образом, запись $o(A) = \omega$ означает, что л.у. множество A изоморфно множеству $\mathbb{N}$.

Введем операцию сложения порядковых типов. Пусть α и β — порядковые типы и пусть $\alpha = o(A)$ и $\beta = o(B)$ для некоторых л.у. множеств A и B, пересечение которых пусто, $A \cap B = \emptyset$ (последнее, как легко видеть, не уменьшает общности). На множестве $C = A \cup B$, определим отношение $<$, считая для произвольных $x, y \in C$ отношение $<$ истинным тогда и только тогда, когда либо $x, y \in A$ и $x < y$ в упорядочении множества A, либо $x, y \in B$ и $x < y$ в упорядочении множества B, либо $x \in A$ и $y \in B$. Непосредственная проверка показывает, что определенное таким образом отношение является отношением линейного порядка, и порядковый тип множества C, рассматриваемого с этим порядком будем называть суммой порядковых типов α и β и обозначать через $\alpha + \beta$.

Легко видеть, что это определение суммы порядковых типов не зависит от выбора множеств A и B: если $\alpha = o(A')$ и $\beta = o(B')$ для некоторых непересекающихся л.у. множеств A' и B' (разумеется, изоморфных множествам A и B соответственно) и множество $C' = A' \cup B'$ упорядочено аналогичным образом, то л.у. множества C и C' будут изоморфными и потому $o(C') = \alpha + \beta$.

Рассмотрим несколько примеров.

Расположение натуральных чисел вида $0, 2, 4, \ldots, 1, 3, 5, \ldots$ является, очевидно, упорядочением множества $\mathbb{N}$ по типу $\omega + \omega$.

Покажем, что $1+\omega = \omega$. В силу принятого выше соглашения 1 является порядковым типом одноэлементного множества $A = \{a\}$. По определению $1 + \omega = o(C)$, где множество $C = A \cup \mathbb{N}$ упорядоченно так, что элемент a меньше всех натуральных чисел, а натуральные числа расположены в обычном порядке. Определим отображение $\varphi : \mathbb{N} \to C$, полагая для произвольного $n \in \mathbb{N}$

$$n\varphi = \begin{cases} a, & \text{если } n = 0 \\ n - 1, & \text{если } n > 0. \end{cases}$$

Непосредственно проверяется, что φ — изоморфизм л.у. множества $\mathbb{N}$ на л.у. множество C, и потому $\omega = o(\mathbb{N}) = o(C) = 1 + \omega$.

С другой стороны, для любого порядкового типа $\alpha = o(B)$ $\alpha + 1$ есть порядковый тип множества, полученного присоединением к множеству B элемента a, который считается больше любого элемента из B. Таким образом, множество, упорядоченное по типу $\alpha + 1$ обладает наибольшим элементом. Поэтому $\omega + 1 \neq \omega$, и мы видим, в частности, что операция сложения порядковых типов не является коммутативной.

Если $<$ — отношение линейного порядка на множестве A, то обратное отношение $<^{-1}$ (определяемое, напомним, по правилу $x <^{-1} y \Leftrightarrow y < x$) также является отношением линейного порядка на этом множестве. Если $\alpha = o(A)$, то порядковый тип множества A, рассматриваемого с отношением $<^{-1}$, называется двойственным к α и обозначается через α^*. Очевидно, что $(\alpha^*)^* = \alpha$, и легко видеть, что для любых α и β имеет место равенство $(\alpha + \beta)^* = \beta^* + \alpha^*$. Отметим также, что порядковый тип множества $\mathbb{Z}$ всех целых чисел с обычным порядком есть $\omega^* + \omega$.

Определение. *Л.у. множество A называется вполне упорядоченным (в.у.), если в каждом непустом подмножестве множества A есть наименьший элемент.*

Очевидно, что всякое конечное л.у. множество является вполне упорядоченным. Примером в.у. бесконечного множества является множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел, рассматриваемое с обычным порядком. Очевидно также, что всякое подмножество в.у. множества является в.у.

Легко видеть, что л.у. множество, изоморфное в.у. множеству, само в.у. Таким образом, можно говорить о порядковом типе в.у. множества, и мы принимаем следующее

Определение. *Порядковый тип в.у. множества называется порядковым числом (или ординальным числом, или ординалом).*

Таким образом, натуральные число и порядковый тип ω являются примерами ординалов.

Определение. *Пусть A — л.у. множество и $a \in A$. Множество*

$$P_a^A = \{x \in A \mid x < a\}$$

называется отрезком множества A (определяемым элементом a).

Предложение 3. *В.у. множество не может быть изоморфным никакому своему отрезку.*

Доказательство этого утверждения начнем с доказательства вспомогательного факта:

Лемма. *Пусть A — в.у. множество и пусть $\varphi : A \to A$ — такое инъективное отображение, что для любых $x, y \in A$ из $x \leqslant y$ следует $x\varphi \leqslant y\varphi$. Тогда для любого элемента $a \in A$ выполнено неравенство $a \leqslant a\varphi$.*

В самом деле, пусть, напротив, существует элемент $a \in A$, для которого $a\varphi < a$. Тогда множество $B = \{x \in A \mid x\varphi < x\}$ непусто и потому обладает наименьшим элементом b_0. Так как тогда $b_0\varphi < b_0$, элемент $b_1 = b_0\varphi$ не входит в множество B и потому $b_1 \leqslant b_1\varphi$. С другой стороны, неравенство $b_1 < b_0$ влечет (с учетом инъективности отображения φ) неравенство $b_1\varphi < b_0\varphi$, т. е. $b_1\varphi < b_1$. Полученное противоречие и доказывает лемму.

Предположим теперь, что для некоторого элемента a в.у. множества A существует изоморфизм φ множества A на отрезок P_a^A. Так как отображение φ удовлетворяет условию леммы, имеем $a \leqslant a\varphi$. Но это неравенство означает, что элемент $a\varphi$ не принадлежит отрезку P_a^A, а это противоречит тому, что этот отрезок является образом множества A.

Примем теперь следующее

Определение. *Пусть α и β — ординалы и пусть $\alpha = o(A)$ и $\beta = o(B)$ для некоторых в.у. множеств A и B. Полагаем $\alpha < \beta$, если существует изоморфизм множества A на некоторый отрезок множества B.*

Таким образом, в соответствии с этим определением для ординалов α и β справедливость отношения $\alpha < \beta$ означает, что α является порядковым типом некоторого отрезка множества, упорядоченного по типу β. Далее будет показано, что на любом множестве ординалов это отношения является линейным порядком.

Предложение 4. *Введенное выше отношение $<$ для ординалов является антирефлексивным и транзитивным. Иначе говоря, на любом множестве ординалов это отношения является отношением строгого (частичного) порядка.*

Доказательство. Антирефлексивность отношения следует непосредственно из предложения 3. Докажем его транзитивность.

Пусть для некоторых ординалов α, β и γ выполнены утверждения $\alpha < \beta$ и $\beta < \gamma$. Это означает, что если $\alpha = o(A)$, $\beta = o(B)$ и $\gamma = o(C)$ для подходящих в.у. множеств A, B и C, то для некоторых элементов $b \in B$ и $c \in C$ существуют изоморфизмы $\varphi : A \to P_b^B$ и $\psi : B \to P_c^C$.

Полагая $c_1 = b\psi$, покажем, что $P_b^B\psi = P_{c_1}^C$.

Действительно, пусть x — произвольный элемент множества $P_b^B\psi$. Тогда $x = y\psi$ для некоторого $y \in P_b^B$, т. е. $y \in B$ и $y < b$. Следовательно, $x = y\psi \in C$ и $x = y\psi < b\psi = c_1$, так что $x \in P_{c_1}^C$, и включение $P_b^B\psi \subseteq P_{c_1}^C$ доказано. Обратно, если $x \in P_{c_1}^C$, то $x < c_1$, и поскольку $c_1 \in B\psi = P_c^C$, т.е. $c_1 < c$, имеем $x < c$. Следовательно, $x \in P_c^C$ и потому $x = y\psi$ для некоторого $y \in B$. Поскольку из неравенства $b \leqslant y$ следует неравенство $b\psi \leqslant y\psi$, противоречащее неравенству $x < c_1$, имеем $y \in P_b^B$ и потому $x \in P_b^B\psi$. Таким образом, $P_{c_1}^C \subseteq P_b^B\psi$, и требуемое равенство доказано.

Теперь очевидно, что произведение $\varphi\psi$ является изоморфизмом множества A на отрезок $P_{c_1}^C$ множества C, и этим доказано, что $\alpha < \gamma$.

Далее будет показано, что любое множество ординалов является линейно упорядоченным и даже вполне упорядоченным отношением $<$.

Для произвольного ординала α обозначим через $W(\alpha)$ множество всех таких ординалов β, что $\beta < \alpha$. Таким образом, если $\alpha = o(A)$ для некоторого в.у. множества A, то ординал β принадлежит множеству $W(\alpha)$ тогда и только тогда, когда $\beta = o(P_a^A)$ для некоторого элемента $a \in A$.

Пусть β_1 и β_2 — произвольные ординалы из $W(\alpha)$, $\beta_1 = o(P_{a_1}^A)$ и $\beta_2 = o(P_{a_2}^A)$, где $a_1, a_2 \in A$. Если элементы a_1 и a_2 различны, то поскольку множество A л.у., один из этих элементов меньше другого; без потери общности можем считать, что $a_1 < a_2$.Легко видеть, что тогда $P_{a_1}^A$ является отрезком в.у. множества $P_{a_2}^A$, и потому по определению неравенства для ординалов имеем $\beta_1 < \beta_2$. Таким образом, множество $W(\alpha)$ является линейно упорядоченным. Более того, отсюда следует также, что отображение $\varphi : A \to W(\alpha)$ является изоморфизмом л.у. множества A на л.у. множество $W(\alpha)$. Отсюда, в свою очередь, следует, что множество $W(\alpha)$ вполне упорядочено и что порядковые типы множеств A и $W(\alpha)$ совпадают. Итогом этих рассуждений является

Предложение 5. *Для любого ординала α множество $W(\alpha)$ вполне упорядочено и $o(W(\alpha)) = \alpha$.*

Полагая, как обычно, для ординалов α и β

$$\alpha \leqslant \beta \Leftrightarrow \alpha < \beta \vee \alpha = \beta,$$

докажем следующее

Предложение 6. *Произвольные ординалы α и β сравнимы, т. е. или $\alpha \leqslant \beta$, или $\beta \leqslant \alpha$.*

Доказательство. Полагаем $D = W(\alpha) \cap W(\beta)$. Являясь подмножеством в.у. множества $W(\alpha)$, множество D в.у., и его порядковый тип обозначим через δ, $\delta = o(D)$.

Покажем, что $\delta \leqslant \alpha$. Если $D = W(\alpha)$, это очевидно. Предположим, что $D \neq W(\alpha)$, т. е. множество $W(\alpha) \setminus D$ непусто. Поэтому в этом множестве есть наименьший элемент, который обозначим через η. Покажем, что $D = W(\eta)$.

Предположим сначала, что ординал γ принадлежит множеству $W(\eta)$. Тогда $\gamma < \eta$, и так как $\eta < \alpha$, имеем $\gamma < \alpha$, т. е. $\gamma \in W(\alpha)$. Поскольку η является наименьшим элементом множества $W(\alpha) \setminus D$ и $\gamma < \eta$, то ординал γ в множество $W(\alpha) \setminus D$ не входит, и потому $\gamma \in D$. Включение $W(\eta) \subseteq D$ доказано.

Пусть теперь $\gamma \in D$, тогда $\gamma < \alpha$ и $\gamma < \beta$. Нам необходимо показать, что $\gamma < \eta$. Предположим, что это неверно. Поскольку ординалы γ и η лежат в л.у. множестве $W(\alpha)$, тогда должно выполняться неравенство $\eta \leqslant \gamma$. Но так как $\gamma < \alpha$ и $\gamma < \beta$, отсюда следует, что $\eta < \alpha$ и $\eta < \beta$. Последнее означает, что η входит в оба множества $W(\alpha)$ и $W(\beta)$, т. е. $\eta \in D$, что противоречит выбору этого ординала. Итак, $\gamma < \eta$, т. е. $\gamma \in W(\eta)$, и включение $D \subseteq W(\eta)$ также доказано.

Из доказанного равенства $D = W(\eta)$ следует, что $\delta = o(D) = o(W(\eta)) = \eta$, откуда получаем $\delta \in W(\alpha)$, т. е. $\delta < \alpha$.

Таким образом, мы доказали, что $\delta \leqslant \alpha$, и аналогично доказывается, что $\delta \leqslant \beta$. Если предположить, что оба неравенства являются строгими, т. е. одновременно $\delta < \alpha$ и $\delta < \beta$, то это будет означать, что δ входит в множество D, что невозможно, так как $\delta = o(W(\delta))$. Следовательно, или $\delta = \alpha$ и тогда $\alpha \leqslant \beta$, или $\delta = \beta$ и тогда $\beta \leqslant \alpha$. Предложение 6 доказано.

Из этого предложения имеем очевидное

Следствие. *Произвольное множество ординалов является линейно упорядоченным.*

В действительности справедливо более сильное

Предложение 7. *Произвольное множество ординалов является вполне упорядоченным.*

В самом деле, для доказательства этого утверждения достаточно показать, что в любом непустом множестве ординалов есть наименьший элемент.

Если множество W ординалов непусто, в нем есть хотя бы один ординал α. Пусть $V = W \cap W(\alpha)$. Если множество V пусто, то α является, очевидно наименьшим в W. Если же множество V непусто, то поскольку оно является подмножеством в.у. (в силу предложения 5) множества $W(\alpha)$, в нем есть наименьший элемент β. Утверждается, что он является наименьшим и в W. Действительно, если для некоторого $\gamma \in W$ выполнено неравенство $\gamma < \beta$, то, поскольку $\beta < \alpha$, имеем $\gamma < \alpha$, т. е. $\gamma \in W(\alpha)$. Но тогда $\gamma \in V$, что невозможно, так как β является наименьшим в V.

Из предложения 7 вытекает

Следствие 1. *Для любого множества ординалов существует ординал, не принадлежащий этому множеству.*

Действительно, в силу предложения 7 произвольное множество ординалов W в.у., и потому его порядковый тип $\alpha = o(W)$ является ординалом. Если $\alpha \notin W$, то утверждение доказано. Остается заметить, что если $\alpha \in W$, то множество $W(\alpha)$ не может содержаться в W, так как в противном случае оно совпадало бы с его отрезком P_α^W и порядковый тип множества W оказался бы равным порядковому типу его отрезка, что невозможно в силу предложения 3.

Иначе говоря, никакое множество ординалов всех ординалов содержать не может. Следовательно, справедливо утверждение, известное как парадокс Бурали - Форти:

Следствие 2. *Множества всех ординальных чисел не существует.*

Выше была введена операция сложения порядковых типов. Нетрудно показать, что сумма двух ординалов является ординалом. В частности, легко видеть, что $\alpha + 1 = o(W(\alpha) \cup \{\alpha\})$.

Предложение 8. *Для любых ординалов α и β из того, что $\alpha < \beta$, следует, что $\alpha + 1 \leqslant \beta$.*

Доказательство. Очевидно, что если $\alpha < \beta$, то $\alpha \in W(\beta)$, $W(\alpha) \subseteq W(\beta)$, и потому $W(\alpha) \cup \{\alpha\} \subseteq W(\beta)$.

Если $W(\alpha) \cup \{\alpha\} = W(\beta)$, то $\beta = \alpha + 1$. В противном случае обозначим через γ наименьший элемент (непустого) множества $W(\beta) \setminus (W(\alpha) \cup \{\alpha\})$ и покажем, что $W(\alpha) \cup \{\alpha\} = W(\gamma)$.

Включение $W(\gamma) \subseteq W(\alpha) \cup \{\alpha\}$ очевидно. С другой стороны, ординал δ принадлежит множеству $W(\alpha) \cup \{\alpha\}$ тогда и только тогда, когда $\delta \leqslant \alpha$, и если предположить, что этот ординал не входит в множество $W(\gamma)$, то будет выполняться неравенство $\gamma \leqslant \delta$. Поскольку тогда $\gamma \leqslant \alpha$, что означает $\gamma) \in W(\alpha) \cup \{\alpha\}$, мы придем к противоречию с выбором γ.

Таким образом, равенство $W(\alpha) \cup \{\alpha\} = W(\gamma)$ доказано. Из него следует, что

$$\alpha + 1 = o(W(\alpha) \cup \{\alpha\}) = o(W(\gamma)) = \gamma,$$

и, так как $\gamma \in W(\alpha)$, $\alpha + 1 < \beta$.

Ординал α называется *непредельным*, если $\alpha = \beta + 1$ для некоторого ординала β. В противном случае α называется *предельным* ординалом. Легко видеть, что ординал $\alpha = o(A)$ является непредельным тогда и только тогда, когда множество A обладает наибольшим элементом. Таким образом, ординал ω является примером предельного ординала. Более того, поскольку из неравенства $\alpha < \omega$ следует, что α — конечный ординал, ω является наименьшим из предельных ординалов.

Введем понятие трансфинитной последовательности.

Пусть α — ординал и пусть M — непустое множество. Отображение $\varphi : W(\alpha) \to M$ называется *трансфинитной последовательностью типа* α, составленной из элементов множества M. Образ ординала $\gamma \in W(\alpha)$ записывают в виде m_γ, а последовательность — в виде $(m_\gamma)_{\gamma<\alpha}$. Таким образом, обычная последовательность является трансфинитной последовательностью типа ω.

Говорят, что множество M *расположено в трансфинитную последовательность*, если отображение $\varphi : W(\alpha) \to M$ сюръективно, т. е. каждый элемент множества M совпадает с некоторым членом последовательности $(m_\gamma)_{\gamma<\alpha}$.

Для множества, расположенного в трансфинитную последовательность, справедлив принцип трансфинитной индукции, являющийся обобщением принципа полной математической индукции и формулируемый следующим образом:

Пусть множество M расположено в трансфинитную последовательность $(m_\gamma)_{\gamma<\alpha}$. Предположим, что подмножество A множества M обладает тем свойством, что для любого ординала γ, $\gamma < \alpha$, из того, что подмножество A содержит все элементы m_δ, где $\delta < \gamma$, следует, что A содержит и элемент m_γ. Тогда $A = M$.

В самом деле, в противном случае множество $M \setminus A$ непусто и потому существует наименьший ординал γ, $\gamma < \alpha$, такой, что $m_\gamma \in M \setminus A$. Тогда для любого δ, где $\delta < \gamma$, мы будем иметь $m_\delta \in A$, а потому, в силу предположения, и элемент m_γ должен входить в A. Это противоречие и доказывает сформулированное утверждение.

Принцип трансфинитной индукции, так же, как и обычный принцип индукции, применим к доказательству математических утверждений и построению математических объектов. Но этот принцип работает лишь для множеств, расположенных в трансфинитную последовательность. Можно доказать, что произвольное множество располагаемо в трансфинитную последовательность в точности тогда, когда его можно вполне упорядочить, т. е. на этом множестве можно ввести отношение линейного порядка, превращающее его во вполне упорядоченное множество.

Возможность вполне упорядочиваемости произвольного множества оказывается зависящим от выбора аксиоматики теории множеств, т.е от включения в систему аксиом теории множеств требования этого в том или ином виде. А именно, можно показать, что следующие четыре утверждения попарно равносильны.

1. Аксиома выбора. Для любого непустого множества M существует функция $f(x)$, определенная на множестве $2^M \setminus \{\emptyset\}$ всех непустых подмножеств множества M, принимающая значения в M и такая, что для любого непустого подмножества $A \subseteq M$ выполнено условие $f(x) \in A$.

2. Лемма Цорна. Пусть частично упорядоченное множество M таково, что любая цепь элементов множества M имеет в этом множестве верхнюю грань. Тогда в множестве M существуют максимальные элементы. Более того, для любого элемента $a \in M$ существует максимальный элемент $b \in M$ такой, что $a \leqslant b$.

3. Теорема Цермело. Каждое множество можно вполне упорядочить.

4. Закон дихотомии для мощностей. Для любых множеств A и B или $|A| \leqslant |B|$, или $|B| \leqslant |A|$.